УДК 624.012:620.174

П.Ф.ВАХНЕНКО, д-р техн. наук, Є.В.КЛИМЕНКО, канд. техн. наук, О.Б.НОСАЧ
Полтавський державний технічний університет ім. Юрія Кондратюка

ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ТРІЩИНОСТІЙКОСТІ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ КОНСТРУКЦІЙ

При дослідженні тріщиностійкості похилих перерізів таврових залізобетонних балок при косому згинанні було застосовано методи планування експериментів. Виконано обробку експериментальних даних методами математичної статистики і отримано математичні моделі фізичного процесу для проведення чисельного експерименту і отримання розрахункових залежностей.

Застосування методів планування факторних експериментів має багато переваг над звичайним однофакторним експериментом [1, 2]:

- позбавляє від необхідності стабілізувати фактори, що змінюються, оскільки вони перетворюються у випадкові величини шляхом приведення умов проведення експерименту до випадкових;
- із зростанням кількості незалежних змінних дисперсія в оцінках коефіцієнтів регресії знижується;
- дозволяє зменшити радіус досліджуваної сфери за рахунок властивостей багатовимірного простору, в результаті чого різко підвищується ефективність експерименту;
- скорочується обсяг експериментальних досліджень;
- оцінки коефіцієнтів регресії виявляються незміщеними.

Провідними факторами для досліджень було обрано: опір бетону на розтяг (R_{bt} – фактор X_1), кут нахилу силової площини (β – X_2), відносний проліт зрізу (a/h_0 – X_3). Для отримання функціональних залежностей фактори повинні змінюватись на трьох рівнях.

Для забезпечення довірчої імовірності β=0,95 треба виконати три вимірювання [2]. При застосуванні плану факторного експерименту з нерівномірним відтворенням при фіксації фактора X_2 на нижньому рівні (β=0°) можна обмежитись двома вимірюваннями. Нами було використано насичений план Бокса-Бенкена для трьох незалежних факторів [2]. При проведенні експериментальних досліджень фіксували навантаження появи нормальних $P_{crc,n}$ і похилих $P_{crc,inc}$ тріщин та руйнування зразка P_u, тобто були отримані три функції відгуку (див. табл.1).

Таблиця 1 – План експерименту і значення функцій відгуку

№ п/п	Шифр зразка	Опір бетону на розтяг R_{bt}, МПа	Умови завантаження		Функції відгуку (в кН)		
			кут нахилу силової площини β, °	відносний проліт зрізу a/h_0	P_u	$P_{crc,n}$	$P_{crc,inc}$
1.	БТ-05-1				46	12	12
2.	БТ-05-2		20	2,0	42	12	14
3.	БТ-06-1				44	8	16
4.	БТ-06-2	1,9			48	14	16
5.	БТ-07-1		10	2,5	46	10	14
6.	БТ-07-2				46	10	16
7.	БТ-08-1		0	1,5	52	12	18
8.	БТ-08-2				56	12	16
9.	БТ-09-1				26	10	14
10.	БТ-09-2		20	2,5	28	10	12
11.	БТ-10-1				30	8	12
12.	БТ-10-2	2,0			54	12	20
13.	БТ-11-1		10	1,5	50	10	16
14.	БТ-11-2				56	12	18
15.	БТ-12-1		0	2,0	48	10	18
16.	БТ-12-2				46	12	16
17.	БТ-13-1				52	12	20
18.	БТ-13-2		20	1,5	48	12	20
19.	БТ-14-1				48	10	16
20.	БТ-14-2	2,1			46	8	16
21.	БТ-15-1		10	2,0	48	10	14
22.	БТ-15-2				44	8	12
23.	БТ-16-1		0	2,5	46	10	14
24.	БТ-16-2				48	10	16

Первинна обробка експериментальних даних факторного експерименту полягає у перевірці рівноточності вимірювань і визначенні дисперсії відтворення. Для перевірки рівноточності вимірювань було використано всі точки плану (N_1=9).

Вибіркову дисперсію в u -му досліді визначаємо за формулою

$$S^2_{y_u} = \frac{1}{\gamma_u - 1}\sum_{i=1}^{\gamma_u}\left(y_{ui} - \bar{y}_u\right)^2 \qquad (1)$$

з $f_u = (\gamma_u - 1)$ ступенями свободи. Тут $\bar{y}_u = \frac{1}{\gamma_u}\sum_{i=1}^{\gamma_u} y_{ui}$ – математичне сподівання функції відгуку в u -й точці експерименту, що реалізується. Оцінку дисперсії відтворення експерименту знаходимо як середньостатистичне

$$S_{\text{відт}}^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N_1} f_u S_{y_u}^2}{\sum\limits_{i=1}^{N_1} f_u} \text{ з } f_{\text{відт}}=\sum_{u=1}^{N_1} f_u=\sum_{u=1}^{N_1}\gamma_u-N_1 \text{ ступенями свободи.}$$

Перевірку рівноточності вимірювань (або однорідності ряду оцінок дисперсій) виконуємо за критерієм Бартлета:

$$B^{\exp}=\frac{1}{C}\left(f_{\text{відт}}\ln S_{\text{відт}}^2-\sum_{u=1}^{N_1} f_u \ln S_{y_u}^2\right). \qquad (2)$$

Тут $C=1+\dfrac{1}{3(N_1-1)}\left(\sum\limits_{u=1}^{N_1}\dfrac{1}{f_u}-\dfrac{1}{f_{\text{відт}}}\right)$.

Згідно з [3, 4], значення B розподілені наближено із χ^2 з $f=N_1-1$ ступенями свободи, якщо $f_u \geq 2$.

Висновок про рівноточність вимірювань робимо за правилом: якщо $B^{\exp}\geq\chi_{\alpha,f}^2$, то при обраному рівні значущості α гіпотеза про рівноточність (однорідність оцінок дисперсій) відкидається [4].

Результати статистичного аналізу вхідних даних для регресійного аналізу зведені до табл.2.

Таблиця 2 – Перевірка рівноточності вимірювань

Функція відгуку, y	P_u	$R_{crc,n}$	$R_{crc,inc}$
Кількість ступенів свободи, f_u	15	15	15
Дисперсія відтворення, $S_{\text{відт}}^2$	4,533	2,267	3,333
Значення критерію Бартлета $B^{\exp}$	2,498	2,587	2,609
Табличне значення критерію Бартлета $B_{\text{табл}}$ при рівні значущості α=0,05	2,733	2,733	2,733
Виконання гіпотези про рівноточність вимірювань	+	+	+

Подальша обробка даних факторного експерименту полягає в обчисленні параметрів математичної моделі фізичного процесу. Для цього використовуємо регресійний аналіз:

1. Застосовуючи метод найменших квадратів, отримуємо лінійне рівняння регресії вигляду

$$\bar{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ij} x_i^2 + \sum_{i<j}^{k} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i<j}^{k} b_{ijl} x_i x_j x_l \,. \qquad (3)$$

2. Перевіряємо значущість коефіцієнтів b_{ij} рівняння регресії за допомогою критерію Стьюдента:

$$t = \frac{|b_i|}{S_{b_i}} > t_{кр.табл.}\,, \qquad (4)$$

де S_{b_i} – середньоквадратичне відхилення похибки визначення коефіцієнта регресії b_i; $t_{кр.табл.}$ – табличне значення критерію Стьюдента для загальної кількості ступенів свободи загальної дисперсії $\nu_{заг} = \nu_1 \nu_2 = (m-1)N$ при рівні значущості q (див. (1)). При виконанні цієї умови коефіцієнт рівняння регресії вважається статистично значущим, при невиконанні – навпаки. Незначущість коефіцієнта регресії може бути викликана наступними причинами:

- екстремум функції відгуку за змінною знаходиться поблизу центра планування;
- фактор, що відповідає незначущому коефіцієнту, не впливає на функцію відгуку;
- припущено великої похибки при визначенні відгуку;
- вибрано малий крок варіювання незалежної змінної.

3. Перевіряємо адекватність прийнятої математичної моделі даним експерименту за критерієм Фішера:

- визначаємо дисперсію адекватності за формулою

$$S_{ад}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} m_i (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2 \,, \qquad (5)$$

де m_i – число повторів досліду в i-му рядку матриці планування; $\bar{y}_i$ – середнє арифметичне відгуку в m повторах досліду; $\hat{y}_i$ – значення функції відгуку, отримане за рівнянням регресії для i-го рядка досліду; l – кількість значущих коефіцієнтів регресії (тобто тих, що залишилися в рівнянні після перевірки за критерієм Стьюдента);

- знаходимо значення *F*-критерію Фішера (дисперсійне відношення)

$$F = S_{ад}^2 / S_{повт}^2 \,; \qquad (6)$$

- порівнюємо з табличним значенням

$$F \le F_{табл} \, . \tag{7}$$

Значення $F_{табл}$ встановлюємо за ступенями свободи $\nu_1 = N - d$, $\nu_2 = N(m-1)$ та рівнем значущості q (тут d – кількість членів апроксимуючого поліному). При виконанні умови (7) математичний опис функції відгуку вважається адекватним дослідним даним.

При недостатньо точному описанні фізичного процесу отриманою моделлю слід підвищити степінь рівняння регресії.

Підсумкові рівняння регресії та їх статистичний аналіз для кожної функції відгуку наведені в табл.3.

Таблиця 3 – Отримані регресійні моделі і оцінка їх адекватності

Функція відгуку		$P_{crc,n}$	$P_{crc,inc}$	P_u
Дисперсійне відношення Фішера F		2,2825	1,7764	2,1050
Залишкова дисперсія $S^2_{y\ зал}$		0,5484	2,3264	27,2603
Дисперсія функції відгуку S^2_y		1,2517	4,1327	57,3838
Коефіцієнти лінійного рівняння регресії		4	4	4
Вільний член	b_0	3,543	20,881	71,673
Фактор X_1 (R_{bt})	b_1	4,579	1,270	1,105
Фактор X_2 (β)	b_2	-0,078	-0,061	-0,445
Фактор X_3 (a/h_0)	b_3	-0,554	-3,556	-11,663

Отримані рівняння регресії адекватно описують фізичний процес і будуть використані для проведення чисельного експерименту в тих точках, де спостереження не проводилися. Обчислені математичним шляхом значення функцій відгуку разом з отриманими безпосередньо з експерименту значеннями апроксимуємо для одержання розрахункових залежностей.

1.Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 304 с.

2.Финни Д. Введение в теорию планирования экспериментов: Пер. с англ. – М.: Наука, 1970. – 288 с.

3.Львовский Е.Н.. Статистические методы построения эмпирических формул: Уч. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 1988. – 239с.

4.Карамышева Ф.Н., Жучкова А.Н. Методические рекомендации по планированию эксперимента в технологии стройматериалов. – Челябинск: УралНИИстромпроект, 1973. – 42 с.

Отримано 28.08.2001